Dyeの理論とアーベル作用素環の接合積 (作用素環研究会報告集)

長田, 尚

数理解析研究所講究録
19巻 1967年 70-88

Dye の理論とアーベル作用素環の接合積

大阪学芸大学　長　田　　尚

Murray - von Neumann の [7，補題5.2.3.] は，新しい接合積のことばでのべると，可換なフォン・ノイマン代数 $\mathcal{A}$ の上に作用しているエルゴード的なアーベル群 G による $\mathcal{A}$ の接合積 $(\mathcal{A}, G)$ は，近似有限型のファクターであると主張している.

証明を与えるかわりに，Murray - von Neumann は，測度空間の写像の分解に関するかなり深い結果が必要であるとのべて，その発表を後日に約した．しかし，この約束は，果されなかつた.

ところで，Dye は，1959年，[4] において，保測変換の詳細な分析に着手し，4年後の1963年 [5] に至つて，ようやく上記の補題をもつと一般的な形で証明することに成功した．この Dye の成功は，作用素環の理論において，一つの里程標をなすものと思われるので，これについて報告すると共に，作用素環の接合積の理論との関連を考えてみたい.

1. 準備

Γ をコンパクトなハウスドルフ空間で，M を Γ 上の複素数値連続函数全体のつくる＊一代数 $C(\Gamma)$ とする．M の実函数の有界な族 $\{f_\alpha\}$ が M において，必ず上限，$\sup_\alpha f_\alpha$，を持つとき，Γ をストーン空間という.

ストーン空間 Γ に対して，M 上の正線型汎函数 λ で忠実，即ち

$$f \geq 0,\ \lambda(f) = 0 \quad ならば \quad f = 0,$$

かつ，正規，即ち

$$\lambda(\sup_\alpha f_\alpha) = \sup_\alpha \lambda(f_\alpha) \ ,$$

なる性質を持つた λ が存在したとき， Γ を超ストーン空間，(Γ, λ) を超ストーン測度空間という．

これに関連して，

(1) M は単位元を持つた可換 C^*- 代数，

(2) M 上の普通の順序に関して， M の自己共役元の有界な族が必らず上限を持つ，

(3) λ は M 上の忠実で正規な正線型汎函数である，

という3条件を M 及び λ が満しているとき，この組 (M, λ) を抽象超ストーン測度空間という．

抽象超ストーン空間が非原子的であるとは，各々の 0 でない射影が任意に小さい正の測度を持つた射影をおさえていることをいう． $\mathcal{A}$ を極小な0でない射影を持たない可換フォン・ノイマン代数， φ を $\mathcal{A}$ 上の有限で忠実な正規トレースとすると，$(\mathcal{A}, \varphi)$ は一つの抽象非原子的超ストーン測度空間である．

今後，特に断わらぬかぎり，(M, λ) は正規化された，即ち $\lambda(1) = 1$ であるような，抽象非原子的超ストーン測度空間を表わすものとする．

M の単位元をふくむ＊ー部分代数 N が，(N, λ) それ自身で抽象超ストーン測度空間になつているとき， N を M の超ストーン部分代数であるという．

N を M の超ストーン部分代数とすると， M の各元 A に対して，

$$\lambda(AB) = \lambda(E_N(A)B)$$

が N のすべての元 B に対して成立する N の元 $E_N(A)$ が A に対して唯一つ存在する．この $E_N(A)$ を A の N に関する条件附期待値という．

$$\lambda_A(B) = \lambda(AB)$$

によつて N 上の汎函数 λ_A を定義する．するとこの $E_N(A)$ は，いわゆる Radon - Nikodym 微係数 $\frac{d\lambda_A}{d\lambda}$ である．条件附期待値は次の性質を持つている．

i) $E_N(1) = 1$

ii) $A \to E_N(A)$ は *一線型な正写像

iii) $E_N(AB) = E_N(A)B$ for $\forall$ $A \in M$, $B \in N$

iv) E_N は正規

v) $E_N(A^*A) \geq E_N(A)^*E_N(A)$ for $\forall$ $A \in M$.

一般に $\mathscr{A}$ を有限で忠実な正規トレース φ を持つたフォン・ノイマン代数，$\mathscr{L}$ を $\mathscr{A}$ のフォン・ノイマン部分代数とすると，$\mathscr{A}$ の各元 A に対して，

$$\varphi(AB) = \varphi(E_{\mathscr{L}}(A)B)$$

が $\mathscr{L}$ のすべての元 B に対して成立する $\mathscr{L}$ の元 $E_{\mathscr{L}}(A)$ が A に対して唯一つ存在する。これを A の $\mathscr{L}$ に関する条件附期待値という．この $E_{\mathscr{L}}$ は上記の i)～ v)をすべて満足する (cf.[12]).

2. Dye によつて導入された基礎的概念

α を M の自己同型写像（ここでは，* 一自己同型写像を単に自己同型写像という）とする．M の射影 P が

$Q \leq P$ なる M の任意の射影 Q に対して $Q^{\alpha} = Q$

を満足するとき，P は α の下で absolutely fixed であるという．M の２つの自己同型写像 α と β が与えられたとき，$\alpha\beta^{-1}$ のもとで absolutely fixed な M の最大の射影を $F(\alpha, \beta)$ で表わす．

M の保測（即ち，$\lambda(A^{\alpha}) = \lambda(A)$ ，これを今後 MP で表わす）自己

同型写像 α と M の恒等写像 1 に対して，$F(\alpha, 1) = 0$ なるとき，α は freely acting であるという．

G を M の MP 自己同型写像のなす一つの群とする．G の単位元 1 と異なるすべての元 g に対して，$F(g, 1) = 0$ なるとき，G を freely acting という．G のすべての元のもとで（同時に）固定している 0 とも 1 とも異なる射影が存在しないとき，G をエルゴード的という．これら freely acting 及びエルゴード性は元々 von Neumann によつて導入されたものである．また G のすべての元のもとで動かない M の元の全体，即ち

$$\{A;\ A \in M,\ A^g = A \quad \text{for } \forall\ g \in G\}$$

を G の fixed algebra という．G の fixed algebra を今後 Z_G で表わす．

M の自己同型写像 α が G に depend しているとは，

$\sup_{g \in G} F(\alpha, g) = 1$ なることをいい，G に depend している M の自己同型写像の全体を [G] で表わし，G によつて決定される充足群という．特に G = [G] のとき，G は充足しているという．

M の MP 自己同型写像のなす 2 つの群 G_1 と G_2 が同値であるとは，$[G_1] = [G_2]$ なることをいい，$G_1 \sim G_2$ と表わす．

(M, λ) と (M', λ') を二つの抽象非原子的超ストーン測度空間，G 及び G' を各々 M 及び M' の MP 自己同型写像のなす群とする．このとき G と G' が弱同値であるとは，M から M' の上への同型写像 φ が存在し，G' の元 g に対して，$\varphi^{-1}((\varphi(A)^g)$ によつて定義される M 上の自己同型写像を $\varphi^{-1}(g)$ で表わすとき，$\varphi^{-1}(G')$ と G が同値になることをいう。

充足群に関連して，次のことが成立する．

定理 1.　G を M の一つの MP 自己同型写像のなす群とすると，$[G]$ は又 MP 自己同型写像のなす群で，$[[G]] = [G]$ が成立する．G_1 を $[G]$ の任意の部分群とすると，$Z_{G_1} \supset Z_G$ が成立する．又 $[G]$ の元 α は，G の元 g_n と M の射影 P_n で，P_n，$P_n^{g_n^{-1}}$ は各々互いに直交し，かつ $\sup_n P_n = \sup_n P_n^{g_n^{-1}} = 1$ なるものにより

$$P^{\alpha} = \Sigma_n P_n P^{g_n}, \qquad P \in M,$$

と表わせ，逆も成立する．

G を M の MP 自己同型写像のなす群で，$Z = Z_G$ とする．このとき，$\alpha \in [G]$ で M の射影 P と Q に対して，$P^{\alpha} \leq Q$ ならば，条件附期待値の性質より $E_Z(P) \leq E_Z(Q)$ が成立する。逆に，

補題　G 及び Z を上と同様とする．このとき，M の射影 P と Q に対して，$E_Z(P) \leq E_Z(Q)$ とすると $[G]$ の元 α で，$P^{\alpha} \leq Q$，$\alpha^2 = 1$ で，$P \cup P^{\alpha}$ の外で 1 なるものが存在する．

これを用いて，

定理 2.　G を M の MP 自己同型写像のなす群で，$Z = Z_G$ とする．このとき，P_0，$P_1, \ldots, P_{n-1}$ を

$$E_Z(P_0) = E_Z(P_1) = \cdots = E_Z(P_{n-1})$$

なる互いに直交する M の射影とすると，$[G]$ の元 α で

$$P_i^{\alpha} = P_{i+1} \pmod{n}, \quad \alpha^n = 1 \text{ かつ } \alpha = 1 \text{ off } P_0 + \cdots + P_{n-1}$$

なるものが存在する．

また，次の定理は，MP 自己同型写像の群の分類，特に後で述べる近似有限群に関連して重要である．

定理3.　α を M の MP 自己同型写像，G を与えられた MP 自己同型写像の群とすると，

$$E([G], \alpha)Q^{\alpha} = E([G], \alpha)Q^{\beta} \quad \text{for}\forall \quad Q \in M$$

を満す最大な射影及び $\beta \in [G]$ が存在する．このとき

$$E([G], \alpha) = \sup_{\gamma \in [G]} F(\alpha, \gamma)^{\alpha} = F(\alpha, \beta)^{\alpha}$$

が成立する．

この節は，[4] の§3と§7による．

3.　接合積との関係

§2で述べた Dye の導入した概念は，接合積の立場から見なおすとどうなるか考えていく．接合積については，[11] を参照して頂くことにし，ここでは簡単に述べる．

$\mathscr{A}$ を（可分な）ヒルベルト空間 H 上の極大可換フォン・ノイマン代数で，φ を $\mathscr{A}$ 上の忠実な正規トレースで，$\varphi(A) = (Aa, a)$, $\|a\| = 1$, $a \in H$，とし，G を φ を保存する $\mathscr{A}$ の自己同型写像のなす freely acting な可附番群とする．（組$(\mathscr{A}, \varphi)$ が一つの抽象超ストーン空間になることとより，φ を保存する $\mathscr{A}$ の自己同型写像とは，$\mathscr{A}$ の MP 自己同型写像に他ならない．）

このときヒルベルト空間 $\mathscr{S} = H \otimes \ell^2(G)$ は，$\{Aa \otimes \varepsilon_g : A \in \mathscr{A}, g \in G\}$ によつて生成される．$\mathscr{A}$ の元 A を $A(Ba \otimes \varepsilon_g) = ABa \otimes \varepsilon_g$ によつて $\mathscr{S}$ へ自然に拡張したものを同じ A で表わす．また G の元 g に対して，

$$U_g(Aa \otimes \varepsilon_h) = A^{g^{-1}}a \otimes \varepsilon_{gh}$$

によつて定義される写像を $\mathscr{S}$ へ拡張したものを同じ U_g で表わす．このとき，$g \to U_g$ は，G の $\mathscr{S}$ へのユニタリー表現で，その上

$$U_g^* A U_g = A^g$$

を満している．

この $\mathscr{A}$ と $\{U_g : g \in G\}$ によつて生成される $\mathscr{S}$ 上のフォン・ノイマン代数を $\mathscr{A}$ の G による接合積といい，$(\mathscr{A}, G)$ で表わす．

このとき，[G] の元 α に関して，定理 1.及び Singer [10] の補題 2.2 に相当する次の定理が成立する．

定理 4. $\alpha \in [G]$ に対し，$\mathscr{A}$ の G による接合積 $(\mathscr{A}, G)$ のユニタリー作用素

$$V_\alpha = \Sigma_{g \in G} E_g U_g$$

で，V_α 及び E_g は

(0) $V_\alpha^* A V_\alpha = A^\alpha$ for $\forall$ $A \in \mathscr{A}$.

(1) 各 $g \in G$ に対して E_g は $\mathscr{A}$ の射影．

(2) $E_g E_h = 0$ for $g \neq h$

(3) $\Sigma_{g \in G} E_g = 1$.

(4) E_g は，αg^{-1} のもとで absolutely fixed である．

という性質を持つているものが存在する．

証明 G の各元 g に対して，$E_g = F(\alpha, g)$ とおき，$V_\alpha = \Sigma_{g \in G} E_g U_g$ とおくと，直接計算により，これが求める V_α であることが分る．

この定理 4.において，(1)～(4)の性質より，E_g は唯一で，$E_g = F(\alpha, g)$ なることが分る．

この逆として，

定理 5. ($\mathscr{A}$, G) の内部自己同型写像に拡張できる $\mathscr{A}$ の自己同型写像は， G に depend している．

証明　$\mathscr{A}$ の自己同型写像 α が ($\mathscr{A}$,G) の内部自己同型写像に拡張できたとする．すると ($\mathscr{A}$,G) のユニタリー作用素 U で

$$A^{\alpha} = U^{*}AU\ , \quad \text{for}\,\forall\ A \in \mathscr{A}\ ,$$

なるものが存在する。今 $U = \Sigma_{g \in G} A_g U_g$ とおくと， $UA^{\alpha} = AU$ ， $\text{for}\,\forall\ A \in \mathscr{A}$，より，両辺の U_g の係数を比較して，

$$A_g A^{\alpha g^{-1}} = AA_g\ , \quad \text{for}\,\forall\ A \in \mathscr{A}\ , \quad g \in G\ ,$$

を得る．

ここで A_g のささえを E_g とおくと， $E_g \leq F(\alpha, g)$ 及び $\sup_{g \in G} E_g = 1$ が上の関係式より得られ，これは， α が G に depend していることを表わしている．

定理 4.と 5.より， $\mathscr{A}$ の自己同型写像 α が [G] に属するための必要且つ十分な条件は， α が ($\mathscr{A}$,G) の内部自己同型写像に拡張できることである，ということが分る．

群の間の同値性は，次のように特徴づけることができる．

定理 6.　$\mathscr{A}$，φを上記のようにし，G_1，G_2 を 2 つの φ を保存する $\mathscr{A}$ の自己同型写像のなす freely acting な可附番群とする． G_1 と G_2 が同値である為の必要且つ十分な条件は，($\mathscr{A}$, G_1) から ($\mathscr{A}$, G_2) の上への $\mathscr{A}$ の元を元毎に固定している空間的同型写像が存在することである．

証明　$G_1 \sim G_2$とすると定義より $[G_1] = [G_2]$ が成立する。よつて $g \in G$, $C[G_2]$ より，定理 4.を用いて，($\mathscr{A}$, G_2) のユニタリー作用素 V_g で $V_g^{*}AV_g = A^g$ なるものが存在する．

そこで，$A\in\mathcal{A}$，$U_g (g\in G_1)$ をとるとき，AU_g に対して AV_g を対応させる $(\mathcal{A}, G_1)$から$(\mathcal{A}, G_2)$ への写像 Φ を考えると，Φ は，

$$\Phi(AU_g\cdot BU_h) = \Phi(AU_g)\Phi(BU_h)$$

及び

$$\Phi(AU_g)^* = (\Phi(AU_g))^*$$

を満す．

また，$g\in G_1$ に対して，V_g を上と同様とする。このとき，$g\in G_1$ $A\in\mathcal{A}$ に対して

$$U'(Aa\otimes\varepsilon_g) = AV_g(a\otimes\varepsilon_1)$$

なる写像を考えると，この U' は $H\otimes\ell^2(G_1)$ から $H\otimes\ell^2(G_2)$ へのユニタリー作用素 U に拡張できる．このとき，直接計算により

$$\Phi(AU_g) = UAU_gU^*$$

が成立することが分る．

従つて Φ は $(\mathcal{A}, G_1)$から $(\mathcal{A}, G_2)$の上への空間的同型写像に拡張でき，その上，Φ の定義より

$$\Phi(A) = A\ ,\quad \text{for}\forall\ A\in\mathcal{A}\ ,$$

が成立する．

逆に，条件を満す $(\mathcal{A}, G_1)$から$(\mathcal{A}, G_2)$ への空間的同型写像 Φ が存在したとする．

$[G_1]$ の各元 α に対し，定理 4.を用いて，$(\mathcal{A}, G_1)$ のユニタリー作用素 V_α で，$V_\alpha^* AV_\alpha = A^\alpha$ $(\text{for}\ \forall\ A\in\mathcal{A})$ なるものが存在する．

ところで，$\Phi(V_\alpha)$ は $(\mathcal{A}, G_2)$ のユニタリー作用素で

$$\Phi(V_\alpha)^* A\Phi(V_\alpha) = \Phi(V_\alpha^* AV_\alpha) = \Phi(A^\alpha) = A^\alpha \qquad \text{for}\forall\ A\in\mathcal{A}\ ,$$

が成立する．よつて，α は $(\mathcal{A}, G_2)$ の内部自己同型写像に拡張できる．

従つて，定理5.を用いて，$\alpha \in [G_2]$ を得る．よつて，$[G_1] \subset [G_2]$，また逆の関係は，対称性より得られ，$G_1 \sim G_2$ が分る．

また弱同値性は，次のように特徴づけることができる．

定理7. $\mathcal{A}_1$ 及び $\mathcal{A}_2$ を各々ヒルベルト空間 H_1 及び H_2 上の極大可換フォン・ノイマン代数で，φ_1 及び φ_2 を各々 $\mathcal{A}_1$ 及び $\mathcal{A}_2$ 上の忠実で正規かつ，

$$\varphi_i(A_i) = (A_i a_i, a_i), \quad \|a_i\| = 1, \quad a_i \in H \quad (i = 1, 2)$$

なるトレースとし，G_1 及び G_2 を各々 $\mathcal{A}_1$ 及び $\mathcal{A}_2$ の φ_1 及び φ_2 を保存する自己同型写像のなす freely acting な可附番群とする．このとき，G_1 と G_2 が弱同値なるための必要かつ十分な条件は，$(\mathcal{A}_1, G_1)$ から $(\mathcal{A}_2, G_2)$ の上への $\mathcal{A}_1$ を $\mathcal{A}_2$ の上へ移す空間的同型写像が存在することである．

証明　G_1 と G_2 が弱同値とすると，定義より $\mathcal{A}_1$ から $\mathcal{A}_2$ の上への同型写像 φ で $\varphi^{-1}(G_2) \sim G_1$ なるものが存在する．すると，[11] の定理１１のアーベルな型として，

$(\mathcal{A}_1, \varphi^{-1}(G_2))$から $(\mathcal{A}_2, G_2)$ の上への空間的同型写像 Φ_0 で $\Phi(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$なるものが存在する．

また，定理6.より，$(\mathcal{A}_1, G_1)$ から$(\mathcal{A}_1, \varphi^{-1}(G_2))$ の上への空間的同型写像 Φ_1 で，$\mathcal{A}$ の元を元毎に固定しているものが存在する．

ここで，$\Phi = \Phi_0 \circ \Phi_1$ とおくとこれが求める空間的同型写像である．

逆に，条件を満す $(\mathcal{A}_1, G_1)$ から $(\mathcal{A}_2, G_2)$ の上への空間的同型写像 Φ が存在したとする．すると，$g \in G_2$ に対して，$\Phi^{-1}(U_g)$ は $(\mathcal{A}_1, G_1)$のユニタリー作用素で，

$$\Phi^{-1}(U_g^{*}\Phi(A)U_g) = \Phi^{-1}(U_g)^{*}A\Phi^{-1}(U_g), \quad \text{for}\ \forall\ A \in \mathcal{A}_1 .$$

が成立する．よつて，$\Phi^{-1}(g)$ は $(\mathcal{A}_1, G_i)$ の内部自己同型写像に拡張できる $\mathcal{A}_1$ の自己同型写像である．従つて，定理5.を用いて，

$$\Phi^{-1}(g) \in [G_1] \quad \text{for}\ \forall\ g \in G_2$$

よつて，$\Phi^{-1}(G_2) \subset [G_1]$ が成立する．ここで，定理1.を用いて，

$[\Phi^{-1}(G_2)] \subset [G_1]$ を得る．

同様にして，$[G_1] \subset [\Phi^{-1}([G_2])]$ を得る．

ところで，直接計算により，

$$[\Phi^{-1}(G_2)] = \Phi^{-1}([G_2])$$

が示せる．

よつて，

$$[G_1] \subset [\Phi^{-1}([G_2])] = [[\Phi^{1}(G_2)]] = [\Phi^{-1}(G_2)]$$

が得られる．

従つて，$[G_1] = [\Phi^{-1}(G_2)]$ ，即ち，G_1 と G_2 は弱同値である．

この節は，[1] と [11] によるが，一部分新しいものもある．

4. MP 自己同型写像の群の型

N を M の超ストーン部分代数とする．M の0でない射影 P が N 上でアーベル的であるとは，$Q \leq P$ なる M の任意の射影 Q に対して，$Q = PC$ なる N の射影 C が存在することをいう．N が M の I 型の部分代数であるとは，M の任意の0でない射影 P に対し，N 上のアーベル的射影 Q で $Q \leq P$ なるものが存在することをいう．また，N が M の II 型の部分代数であるとは，M が N 上でのアーベル的射影を含んでいないことをいう．

G を M の MP 自己同型写像のなす群で，$Z = Z_G$ とする．このとき，Z が M の I 型の部分代数であるか II 型の部分代数であるかに従つて，G を I 型及び II型の群であるという．また，I 型の群は，次のように細かく分けることができる．

G が I_n 型の群であるとは，M の互いに直交している射影 P_1，$P_2, \ldots, P_n$ で各 P_i は，Z 上でアーベル的で，

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \ , \quad E_Z(P_1) = \cdots = E_Z(P_n)$$

なるものが存在することをいう．このときの$P_1, P_2, \ldots, P_n$ を G に対するアーベル基という．また I 型の群が有界であるとは，Mの単位元１が fixed algebra 上でのアーベル的射影の有界個の上限として表わされることをいう．

I 型の群に関して，次のことが成立する．

定理 8. (1) I型の群は，I_n 型 $(n = 1,2,..)$の群の直和としてただ一通りに表わされる．

(2) I_n 型の群は，位数 nの freely acting な巡回群と同値である．また位数 n の freely acting な群は，I_n 型である．

(3) 位数 n の freely acting な群 G は $\{P^g;\ g \in G\}$ なるアーベル基を持つ．逆に，$\{P^g;\ g \in G\}$ が互いに直交し，$\sup_{g \in G} P^g = 1$ なるとき，$\{P^g;\ g \in G\}$ は，G に対するアーベル基である．

また，アーベル的射影に関して，次の事が成立する．

定理 9. G を M の MP 自己同型写像のなす群で，Q を Z_G 上でのアーベル的射影とする．すると，

(1) $[G]$ の元 α，β がある P に対して，$P^\alpha \leq Q$ かつ $P^\beta \leq Q$ なら

ば，$P^{\alpha} = P^{\beta}$ である．

(2) [G] の元 α が freely acting であるならば，$Q^{\alpha}\cdot Q = 0$ である．

この定理 9.(2) より，任意の freely acting な無限群は II 型であることが分る．

以下，話の中心は，II 型の群であるが，この II 型の群に関して，次の Maharam の補題は，重要な役割を果す．

Maharam の補題： N を M の II 型の部分代数とし，P を M の任意に与えられた射影とする．このとき，$0 \leq A \leq E_N(P)$ なる N の任意の元 A に対して，M の射影 Q で，$Q \leq P$ かつ $E_N(Q) = A$ なるものが存在する．

M の MP 自己同型写像全体のなす群に通常の

$$d(\alpha, \beta) = \sup\{\lambda(P^{\alpha} \Delta P^{\beta}) : P \text{ は } M \text{ の射影}\}$$

のほかに

$$\delta(\alpha, \beta) = \lambda(1-F(\alpha, \beta))$$

によつて，二つの距離を導入すると，d と δ は同値になることがわかる．

G を一つの MP 自己同型写像のなす群とする．このとき，α と [G] の δ による距離は，

$$\delta(\alpha,[G]) = \inf_{\gamma\in[G]} \delta(\alpha,\gamma) = 1-\sup_{\gamma \in [G]} \lambda(F(\alpha, \gamma)^{\alpha})$$

で与える．ここで，定理 3. を用いて，

$$\delta(\alpha, [G]) = \lambda(1-E([G], \alpha))$$

を得る．

定理 1 0. MP 自己同型写像のなす群 G に関する次の条件は，同値で

である．

Gの任意の有限集合 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ と $\varepsilon > 0$ に対して，

(1) [G]の I型の部分群 K で，i=1,2,...n に対して，

$\delta(\beta_i, [K]) < \varepsilon$ なるものが存在する．

(2) [G]の有限部分群 K と K の元 $\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_n'$ で i=1,2,...n に対して，$d(\beta_i, \beta_i') < \varepsilon$ なるものが存在する．

(3) [G]の I 型の部分群 K で，i=1,2,...,n に対して，

$$\sup\{\ \lambda(c \,\Delta\, c^{\beta i}) : c \text{ は } z_K \text{ の射影}\} < \varepsilon$$

なるものが存在する．

その上，Gに関して，上の条件が成立すれば，[G]に対しても成立し，従つて，Gと同値な任意の群に対して成立する．

群 G が定理10.の同値な条件(1)〜(3)のどれかを満足するとき，Gを近似有限であるという．

定義より，Gの任意の有限個の元で生成される部分群が近似有限ならば，G は近似有限である．

近似有限群に関して，近似有限 factor の場合に類似した結果が得られる (cf, [3])．

例えば，

定理11. Gを M の MP 自己同型写像のなす可附番群と同値な II 型の群とする．このとき，G が近似有限であるための必要且つ十分な条件は，Gが位数2の freely acting な群の可附番無限個の“制限された直積”になつている freely acting な群と同値であることである．

近似有限群の例としては，

(i) 一つの MP 自己同型写像で生成される群

(ii) freely acting なアーベル群

がある．

この (ii) が近似有限群であるということは，Dye の理論における一つの重要な結果で，このことを示す為に，Dye は次の事実を利用した．

定理１２．Gを対称な有限部分集合 F によつて生成された freely acting な群とする．F の濃度を h_1，$F^n - F^{n-1}$ の濃度を $h_n (n > 1)$ とおく．このとき，

$$\inf_n h_{2n}/(h_1+\cdots+h_n) = 0$$

ならば，G は近似有限である．

この節は，[4] の§2，4，6 及び [5] の §4 による．

5. フォン・ノイマン代数との関係

$\mathscr{A}$ をフォン・ノイマン代数は，φ を $\mathscr{A}$ 上の忠実で正規な $\varphi(1) = 1$ なるトレース，$\mathscr{L}$ を極小な0でない射影を持つていない $\mathscr{A}$ の極大可換フォン・ノイマン部分代数とする．また

$$N(\mathscr{L}) = \{\text{ユニタリー作用素 } U; U \in \mathscr{A}, U\mathscr{L}U^* = \mathscr{L}\}$$

とおく．すると，$(\mathscr{L}, \varphi)$ は抽象非原子的超ストーン測度空間となり，$\mathscr{L}$ の元 A に対して，$\phi_U(A) = UAU^* (U \in N(\mathscr{L}))$ とすると，$U \to \phi_U$ は $N(\mathscr{L})$ から $(\mathscr{L}, \varphi)$ の MP 自己同型写像全体のなす群への準同型写像で

$$G = \{\phi_U : U \in N(\mathscr{L})\}$$

は充足群である．

条件附期待値に関連して，次のことが成立する (cf. [2])．

定理１３．$\mathscr{A}$ と $\mathscr{L}$ は上と同様とする．$\mathscr{B}$ を $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ なる $\mathscr{A}$ のフォン・ノイマン部分代数とし，U を

$$U\mathscr{L}U^* \subset \mathscr{L} \text{ かつ } U^*\mathscr{L}U \subset \mathscr{L}$$

という意味で $\mathscr{A}$ を保存する $\mathscr{R}$ の部分等距離作用素とすると，U の $\mathscr{L}$ に関する条件附期待値 $E_{\mathscr{L}}(U)$ は，$\mathscr{A}$ を保存する部分等距離作用素である．

このことより，

定理１４． $\mathscr{A}$ を $\mathscr{R}$ の正則な極大可換フォン・ノイマン部分代数，$\mathscr{L}$ を $\mathscr{A}\subset\mathscr{L}\subset\mathscr{R}$ なる $\mathscr{R}$ のフォン・ノイマン部分代数で，K を $N(\mathscr{A})\cap\mathscr{L}$ によつて，ひきおこされた $(\mathscr{A},\varphi)$ の M P 自己同型写像のなす充足群とする．このとき，$\mathscr{A}$ は，$\mathscr{L}$ の極大可換なフォン・ノイマン部分代数として，正則であり，$N(\mathscr{A})$ の各元 U に対して，$N(\mathscr{A})\cap\mathscr{L}$ の元 W で，$E_{\mathscr{L}}(U) = E(K, \phi_U)W$ なるものが存在する．

以下，しばらく，$\mathscr{A}$ は正則としておく．

定理１４.より，ϕ_U が freely acting なるための必要且つ十分な条件は，$E_{\mathscr{A}}(U) = 0$ であることが分る．

また，定理１４.を用いて，G の充足部分群 K と $\mathscr{R}$ の $\mathscr{A}\subset\mathscr{L}\subset\mathscr{R}$ なるフォン・ノイマン部分代数 $\mathscr{L}$ との間に１対１の対応が存在することが分る．この対応は，K に対して，$\{U\in N(\mathscr{A}) : \phi_U\in K\}$ によつて生成される $\mathscr{R}$ のフォン・ノイマン部分代数 $\mathscr{L}$ を，逆に，$\mathscr{L}$ に対して，$\{\phi_U : U\in N(\mathscr{A})\cap\mathscr{L}\}$ なる充足群 K を対応させる対応である．この対応によつて型は保存される．即ち

定理１５． $\mathscr{R}$ のフォン・ノイマン部分代数 $\mathscr{L}$ が，（作用素環として）I 型ならば，対応する群は，（$(\mathscr{A}, \varphi)$ の M P 自己同型写像のなす群として）I 型であり，$\mathscr{L}$ が II 型ならば，対応する群も II 型である．

さらに，次の結果も成立する．

定理１６． G が近似有限ならば，$\mathscr{R}$ は近似有限である．

ここでは，空間の可分性は仮定してない．可分性の仮定のない近似有限性

については，[6] および [13] を参照のこと．

ここで，改めて，$\mathscr{A}$ を（可分な）ヒルベルト空間 H 上の極小な 0 でない射影を持たぬ極大可換フォン・ノイマン代数で，φ を $\mathscr{A}$ の $\varphi(A) = (Aa,\ a), \|a\|=1\ a \in H$, なる忠実で正規なトレースとし，G を φ を保存する自己同型写像のなす freely acting な可附番群とする．このとき，$\mathscr{A}$ の G による接合積 $(\mathscr{A}, G)$ を考える．すると，$\mathscr{A}$ は，極小な 0 でない射影を持たぬ $(\mathscr{A}, G)$ の極大可換フォン・ノイマン部分代数で，しかも，正則である．また，上記の対応において，$(\mathscr{A}, G)$ に対応している充足群は [G] なることが，定理 4.及び 5.より分る．いま，特に G が近似有限であるとすると，[G] は近似有限，従つて，定理 1 6.より $(\mathscr{A}, G)$ は近似有限である．よつて，特に G を freely acting なアーベル群とすれば，$(\mathscr{A}, G)$ は，近似有限になり，Murray-von Neumann が証明なしで述べている結果（[7]，補題 5. 2. 3.）が得られる．

また，Murray - von Neumann の結果は別の方法によつても得られる．即ち，$\mathscr{A}$ を上と同様とし，G を $\mathscr{A}$ 上の φ を保存在する自己同型写像のなす freely acting なエルゴード的アーベル可附番無限群とする．このとき，定理 1 1.より，G と同値な freely acting でエルゴード的な可附番無限群 K と有限群 $K_n (n=1,2,\ldots)$ で

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots$$

かつ

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

なるものが存在する．

従つて，[7] の補題 5. 2. 2.より $(\mathscr{A}, K)$ は近似有限である．また G と

K は同値より $(\mathscr{A},G)$ と $(\mathscr{A},K)$ は同型，よつて，$(\mathscr{A},G)$ は近似有限である．

以上の Dye の理論で， fixed algebra が重要な役割を演じていた．これら fixed algebra に関して，[8] 及び [9] でいくつかの結果が得られているが，ここでは，省略する．

この節は，主として，[5] の §6 による．

[文　　献]

1. H. Choda: On automorphisms of abelian von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 41, 280 - 283 (1965).
2. M. Choda: On the conditional expectation of partial isometry in a certain von Neumann algebra, Proc. Japan Acad., 41, 277 - 279 (1965).
3. J. Dixmier: Les algèbres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier - Villars, Paris (1957).
4. H. A. Dye: On groups of measure preserving transformations I, Amer. J. Math., 81, 119 - 159 (1959).
5. _____ : On groups of measure preserving transformations II, Amer. J. Math., 85, 551 - 576 (1963).
6. Y. Misonou: Generalized approximately finite W^*-algebras, Tohoku Math. J., 7, 192 - 205 (1955).
7. F. J. Murray and J. von Neumann: On rings of operators IV, Ann. of Math., 44, 716 - 808 (1943).
8. T. Saito: Some remarks on a representation of a group, Tohoku Math. J., 12, 383 - 388 (1960).
9. T. Saito and J. Tomiyama: Some results on the direct product of W^*-algebras, Tohoku Math. J., 12, 455 - 458 (1960).
10. I. M. Singer: Automorphisms of finite factors, Amer. J. Math., 77, 117 - 133 (1955).

11. 鶴 丸 孝 司 : Factorの構成法と接合積　数理解析研究所講究録 5 19－39 (1965)

12. 梅 垣 寿 春 : 作用素環と確率論に関する二、三の問題　数理解析研究所講究録 5 40－66 (1965)

13. H. Widom: Approximately finite algebras, Trans. of Amer. Math. Soc., 83, 170 - 178 (1956).